

29T MATH

2019

MATHEMATICS

Full Marks : 100

Pass Marks : 30

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

Q. No. 1 (a-j) carries 1 mark each

$$1 \times 10 = 10$$

Q. Nos. 2-13 carry 4 marks each

$$4 \times 12 = 48$$

Q. Nos. 14-20 carry 6 marks each

$$6 \times 7 = 42$$

$$\text{Total} = 100$$

Contd.

1. Answer the following questions :

1×10=10

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা :

- (a) Let $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ is an odd natural number}\}$ and
 $B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ is a prime number}\}$.

Write the number of relations from A to B .

1

ধৰা হ'ল $A = \{x : 1 < x < 10, x \text{ এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা}\}$ আৰু

$B = \{y : 90 < y < 100, y \text{ এটা মৌলিক সংখ্যা}\}$ ।

A ৰ পৰা B লৈ হোৱা সম্বন্ধৰ সংখ্যা লিখা।

- (b) Write down the range of $f(x) = \cot^{-1} x$.

1

$f(x) = \cot^{-1} x$ ফলনৰ পৰিসৰ লিখা।

- (c) Find all the positive values of 2×2 determinants whose entries are from the set $\{-1, 0, 1\}$.

1

সংহতি $\{-1, 0, 1\}$ ৰ মৌল সমূহেৰে গঠিত 2×2 সাৰণিকবোৰৰ সকলো ধনাত্মক মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (d) Let A be a skew-symmetric matrix of odd order. Write the value of $|A|$.

1

ধৰা হ'ল A এটা অযুগ্ম মাত্ৰাৰ বিষম সমমিত মৌলকক্ষ। $|A|$ ৰ মান লিখা।

- (e) Let A be a matrix of order 3, such that $|A| = -9$. Find the value of $|-3A^{-1}|$. 1

ধৰা হ'ল A এটা 3 মাত্ৰাৰ মৌলিকৰূপ য'ত $|A| = -9$ । $|-3A^{-1}|$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

- (f) If $2^x = 3^y$, then find $\frac{dy}{dx}$. 1

যদি $2^x = 3^y$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

- (g) Evaluate $\int 2x f'(x^2) dx$. 1

$\int 2x f'(x^2) dx$ নিৰ্ণয় কৰা।

- (h) Find the order and degree of the differential equation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0. \quad 1$$

$\frac{d^2y}{dx^2} - 7\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 6y = 0$ অবকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু ঘাত নিৰ্ণয় কৰা।

- (i) Write the interval in which the function $f(x) = \cos x$ is strictly decreasing. 1

$f(x) = \cos x$ ফলনটো কোনটো অন্তৰালত সতত হ্রাসমান হয় লিখা।

- (j) Write the equation of the plane passing through (a, b, c) and parallel to xy -plane. 1

(a, b, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু xy -সমতলৰ সমান্তৰাল হোৱা সমতলখনৰ সমীকৰণ লিখা।

2. Let the mapping $f(x) = ax + b$, $a > 0$, maps $[-1, 1]$ onto $[0, 2]$; show that $\cot(\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18) = f(2)$. 4

ধৰা হ'ল ফলন $f(x) = ax + b$, $a > 0$ আৰু $[-1, 1]$ ৰ আচ্ছাদন প্ৰতিচিত্ৰ হ'ল $[0, 2]$; দেখুওৱা যে, $\cot(\cot^{-1}7 + \cot^{-1}8 + \cot^{-1}18) = f(2)$.

OR/অথবা

Find the value of

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)\right\}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1.$$

$$\cos^{-1}x + \cos^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(x + \sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)\right\}, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

মান নিৰ্ণয় কৰা।

3. Let $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = 3x - 2$ and $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by $g(x) = \frac{x+2}{3}$.

Show that $f \circ g = g \circ f$.

4

ধৰা হ'ল $f : R \rightarrow R$ ক $f(x) = 3x - 2$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে আৰু $g : R \rightarrow R$ ক

$$g(x) = \frac{x+2}{3} \text{ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে।}$$

দেখুওৱা যে, $f \cdot g = g \cdot f$.

4. Show that

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3 \quad 4$$

দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

OR/অথবা

Without expanding show that

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

বিস্তাৰ নকৰাকৈ দেখুওৱা যে,

$$\begin{vmatrix} (a^x + a^{-x})^2 & (a^x - a^{-x})^2 & 2 \\ (b^x + b^{-x})^2 & (b^x - b^{-x})^2 & 2 \\ (c^x + c^{-x})^2 & (c^x - c^{-x})^2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

5. Show that the function f defined by

$$f(x) = |1 - x + |x||, \quad x \in \mathbb{R} \text{ is a continuous function.}$$

4

দেখুওঁৰা যে, $f(x) = |1 - x + |x||$, $x \in \mathbb{R}$ ৰে সংজ্ঞাবদ্ধ ফলন f , এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন।

OR/অথবা

Discuss the applicability of Rolle's theorem to the function $f(x) = x^2 + 1$ on $[-2, 2]$.

ফলন $f(x) = x^2 + 1$, অন্তৰাল $[-2, 2]$ ত ৰলচ্ উপপাদ্যৰ প্ৰয়োগ আলোচনা কৰা।

6. If $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, find $\frac{dy}{dx}$.

4

যদি $y = \sqrt{e^{\sqrt{x}}}$, তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰা।

7. If $y = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3} \right)$, $x \geq 0$,

find $\frac{dy}{dx}$.

4

যদি $y = \frac{1}{2} \cos^{-1} \left(\frac{1 - 4x^3}{1 + 4x^3} \right)$, $x \geq 0$,

তেন্তে $\frac{dy}{dx}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Determine the set of all points where the function $f(x) = x|x|$ is differentiable.

ফলন $f(x) = x|x|$ অৱকলনীয় হোৱাৰ বিন্দুসমূহৰ সংহতি নিৰ্ধাৰণ কৰা।

8. Evaluate $\int \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$

4

$\int \frac{1}{x} \left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Evaluate $\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$.

$\int \frac{\cos 8x + 1}{\tan 2x - \cot 2x} dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

9. Evaluate $\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2} dx$.

4

$\int_0^1 \frac{3-x^2}{(3+x^2)^2} dx$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

OR/ অথবা

Evaluate $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$

$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}} dx$ ৰ মান নির্ণয় কৰা।

10. Solve the differential equation

4

$$x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$$

অৱকল সমীকৰণ $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^2 \log x$ সমাধান কৰা।

11. If $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$,

show that $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$.

4

যদি $y = 3 \cos(\log x) + 4 \sin(\log x)$,

দেখুওৱা যে, $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$ ।

12. If $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ and $\vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ then determine the vector component of \vec{a} along \vec{b} .

4

যদি $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j}$ আৰু $\vec{b} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$ তেন্তে \vec{b} ৰ দিশত \vec{a} ৰ ভেক্টৰ উপাংশ নির্ণয় কৰা।

OR/অথবা

Find a unit vector perpendicular to each of the vectors $\vec{a} + \vec{b}$ and $\vec{a} - \vec{b}$, where $\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ and $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$.

$\vec{a} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ তেস্তে $\vec{a} + \vec{b}$ আৰু $\vec{a} - \vec{b}$ দুয়োটা ভেক্টৰৰ ওপৰত লম্ব হোৱা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰা।

13. A natural number is selected at random from the set

$A = \{x : 1 \leq x \leq 50\}$. Find the probability such that the number satisfies the inequation $x^2 - 13x \leq 30$. 4

সংহতি $A = \{x : 1 \leq x \leq 50\}$ ৰ পৰা যাদৃশিক ভাবে এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। সংখ্যাটোৱে অসমতা সমীকৰণ $x^2 - 13x \leq 30$ সমাধান কৰাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

14. If $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, then

show that $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$,

where I is the identity matrix of order 2.

6

যদি $A = \begin{bmatrix} 0 & -\tan \frac{\alpha}{2} \\ \tan \frac{\alpha}{2} & 0 \end{bmatrix}$, তেন্তে

দেখুওৱা যে, $I + A = (I - A) \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$,

য'ত I এটা 2 মাত্ৰাৰ একক মৌলকক্ষ।

OR / অথবা

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, then find A^{-1} ; and hence solve the

system of equations -

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} নিৰ্ণয় কৰা; আৰু

সমীকৰণ পদ্ধতি

$$x + 2y - 3z = -4$$

$$2x + 3y + 2z = 2$$

$$3x - 3y - 4z = 11$$

সমাধান কৰা।

15. Form the differential equation satisfied by $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, where a and b are arbitrary constants. 6

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ সমীকৰণে সিদ্ধ কৰা অবকলজ সমীকৰণ গঠন কৰা, য'ত a আৰু b ঐচ্ছিক ধ্ৰুবক।

OR / অথবা

Find the maximum and minimum values of the function $f(x) = x + \sin 2x$ on $[0, 2\pi]$.

$[0, 2\pi]$ অন্তৰালত $f(x) = x + \sin 2x$ ফলনৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰা।

16. Prove that the area of a right angled triangle of a given hypotenuse is maximum when the triangle is isosceles. 6

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰদত্ত অতিভুজ বিশিষ্ট এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ কালি সৰ্বোচ্চ হ'ব যেতিয়া ত্ৰিভুজটো সমদ্বিবাহু হ'ব।

OR / অথবা

Find the area of the smaller portion enclosed by the curves $x^2 + y^2 = 9$ and $y^2 = 8x$.

$x^2 + y^2 = 9$ আৰু $y^2 = 8x$ বক্ৰই আগুৰা সৰু অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

17. Find the shortest distance between the lines

$$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$$

$$\text{and } \vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}).$$

6

$\vec{r} = 6\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda (\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k})$ আৰু $\vec{r} = -4\hat{i} - \hat{k} + \mu (3\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k})$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

Find the equations of two lines through the origin which intersect

the line $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ at $\frac{\pi}{3}$.

মূলবিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা $\frac{x-3}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$ ৰেখাডালক $\frac{\pi}{3}$ কোণত ছেদ কৰা ৰেখা

দুডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

18. Prove that $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$. Hence find the area of the parallelogram whose diagonals are the vectors

$$3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k} \text{ and } \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}.$$

6

প্রমাণ কৰা যে $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$ । এতেকে ভেক্টৰ $3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ আৰু $\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ কৰ্ণ বিশিষ্ট সমান্তৰিকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰা।

OR/অথবা

Find the vector equation of the line passing through $(1, 2, 3)$ and parallel to the planes $\vec{r} \cdot (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 5$ and $\vec{r} \cdot (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6$.

$(1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে পাৰহৈ যোৱা আৰু $\vec{r} \cdot (\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}) = 5$ আৰু $\vec{r} \cdot (3\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6$ সমতলৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ ভেক্টৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

19. Solve the linear programming problem graphically.

6

লৈখিক নিয়মেৰে তলৰ ৰৈখিক প্ৰোগ্ৰামিং সমস্যাটোৰ সমাধান উলিওৱা।

Maximize $z = 20x + 15y$, subject to the conditions

$$2x + y \leq 200,$$

$$x + y \leq 150 \text{ and } x \geq 0, y \geq 0.$$

$z = 20x + 15y$ ৰ সৰ্ব্বোচ্চ মান উলিওৱা

য'ত,

$$2x + y \leq 200,$$

$$x + y \leq 150 \text{ আৰু } x \geq 0, y \geq 0।$$

OR / অথবা

Maximize and minimize

$z = 5x + 2y$, subject to the conditions,

$$\begin{aligned}x - 2y &\leq 2, \\3x + 2y &\leq 12, \\-3x + 2y &\leq 3 \quad \text{and } x \geq 0, y \geq 0.\end{aligned}$$

$z = 5x + 2y$ ৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওৱা
য'ত

$$\begin{aligned}x - 2y &\leq 2, \\3x + 2y &\leq 12, \\-3x + 2y &\leq 3 \quad \text{আৰু } x \geq 0, y \geq 0.\end{aligned}$$

20. Two numbers are selected at random from a set of first 90 natural numbers. Find the probability that the product of randomly selected numbers is divisible by 3. 6

প্রথম 90টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা 2টা সংখ্যা যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা হ'ল। যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা সংখ্যা দুটাৰ গুণফল 3ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

OR / অথবা

In a 3×3 matrix, entries a_{ij} are selected randomly from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 with replacement where each element a_{ij} is a three digit number. Find the probability that each element in each row is divisible by 15.

এটা 3×3 মাত্ৰাৰ মৌলকক্ষৰ মৌলসমূহ a_{ij} ক অংক 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ৰ পৰা পুনৰস্থাপিত হিচাবত যাদৃশিকভাৱে নিৰ্বাচন কৰা হৈছে, য'ত প্ৰত্যেক a_{ij} এটা তিনিটা অংক বিশিষ্ট সংখ্যা। প্ৰত্যেক শাৰীৰ প্ৰত্যেক মৌল 15ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা।

— x —